



Демонстрационный вариант
Профильного Единого государственного экзамена 2019
по математике

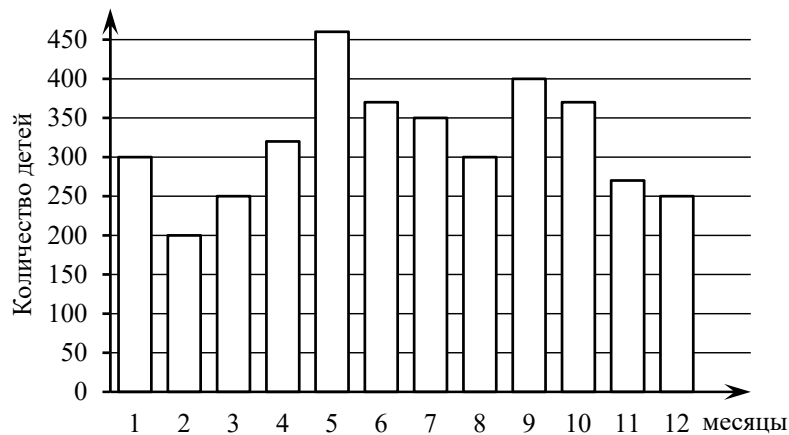
Вариант Л3 (лёгкий уровень)

Часть 1

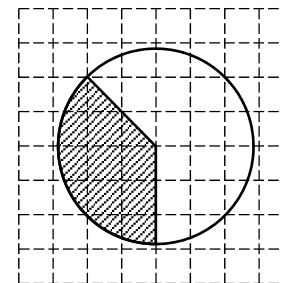
Ответом к заданиям 1—12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

1 Зимой 2 кг помидоров и 3 кг апельсинов стоят 270 рублей. Летом цена на помидоры снижается на треть, в результате 3 кг помидоров и 2 кг апельсинов стоят 230 рублей. Сколько рублей стоит килограмм помидоров зимой?

2 На диаграмме показана рождаемость в Троицке в течение года. Используя диаграмму, укажите количество месяцев, в которые родилось не более 250 детей.



3 Найдите площадь S незакрашенного сектора, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. В ответе укажите величину S/π .

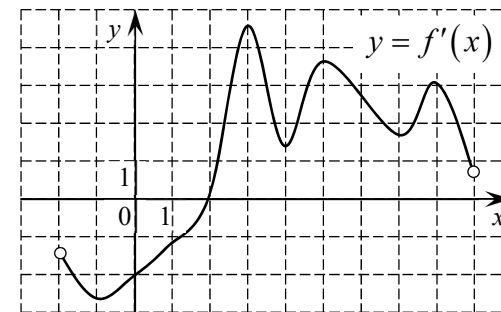


4 В стране единорогов бывает два типа погоды: хорошая и замечательная, причём погода держится неизменной в течение всего дня. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как сегодня. Сегодня 3 июля, и погода в стране единорогов замечательная. Найдите вероятность того, что 5 июля погода в стране единорогов тоже будет замечательная.

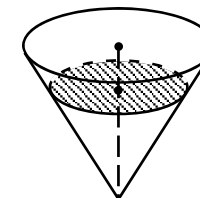
5 Решите уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$. Если корней получится больше одного, то в ответе укажите их сумму.

6 Точка C делит хорду AB окружности радиуса 6 на части $AC = 4$ и $BC = 5$. Найдите расстояние от точки C до ближайшей точки на окружности.

7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 7]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8 В бокале, имеющем форму правильного кругового конуса, уровень мартини достигает $4/5$ высоты. Объём бокала 250 мл. Чему равен объём мартини? Ответ дайте в кубических миллилитрах?



Часть 2

- 9 Упростите выражение и найдите его значение при $\alpha = \frac{11\pi}{12}$:

$$\sqrt{4\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2 \alpha}$$

- 10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака. При этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону:

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$$

где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ метров — начальная высота столба воды, $k = 1/1200$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). Определите, через какое время после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды. Ответ дайте в минутах.

- 11 Три бригады укладывают рельсовый путь. Первая и третья бригады вместе укладывают в месяц 15 км пути, а все три бригады вместе укладывают в месяц вдвое больший путь, чем первая и вторая бригады вместе. Сколько километров пути в месяц укладывает третья бригада, если вторая и третья бригады вместе укладывают определенный участок пути вчетверо быстрее, чем одна вторая бригада?

- 12 Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[-3, 3]$:

$$y = x^2 - 5|x+1| - 2$$

Для решения задач 13—19 используйте отдельные бланки. Запишите сначала номер задачи, а затем — полное обоснованное решение и ответ.

- 13 а) Решите уравнение:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x} - \sqrt{3}\sin 2x$$

б) Найти все корни этого уравнения на отрезке $[0; \pi]$.

- 14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.

- а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK , пересекает отрезок $A_1 K$.
б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

- 15 Решите неравенство: $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7$.

- 16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T .

- а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC .
б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC , если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

- 17 Вкладчик положил две одинаковые суммы под $r\%$ годовых в банки «А» и «Б». Через год условия по вкладу в банке «А» изменились, и он понизил ставку до 10% годовых, в то время как банк «Б» оставил годовую ставку без изменений. Найдите наименьшее целое r , при котором вклад в банке «Б» через 3 года будет по крайней мере на 20% больше, чем вклад в банке «А».

- 18 Найти все a , при которых уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

- 19 На доске написано n чисел a_1, \dots, a_n , каждое из которых не меньше 50, но не больше 150. Каждое из чисел a_i ($1 \leq i \leq n$) уменьшили на $r_i\%$ соответственно. При этом для каждого i ($1 \leq i \leq n$) либо $r_i = 2$, либо число a_i уменьшилось на 2.

- а) Может ли среднее арифметическое чисел r_1, \dots, r_n быть равным 5?
б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое чисел r_1, \dots, r_n больше 2, а сумма чисел a_1, \dots, a_n уменьшилась более чем на $2n$?
в) Известно, что на доске написано 30 чисел и их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического чисел r_1, \dots, r_{30} .