



Демонстрационный вариант
 Профильного Единого государственного экзамена 2018
 по математике

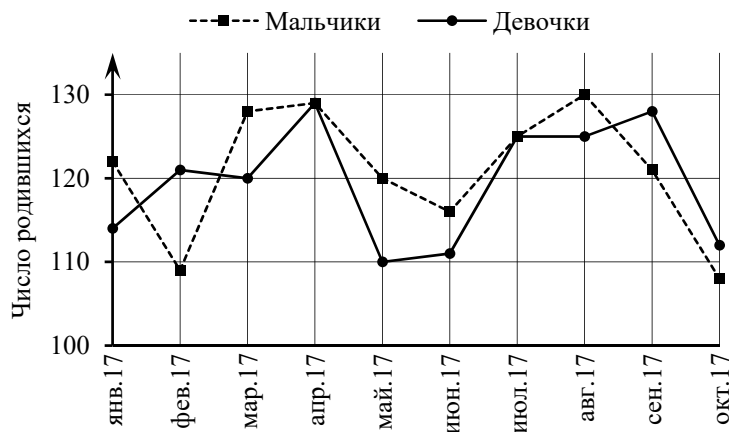
Вариант М2 (средний уровень)

Часть 1

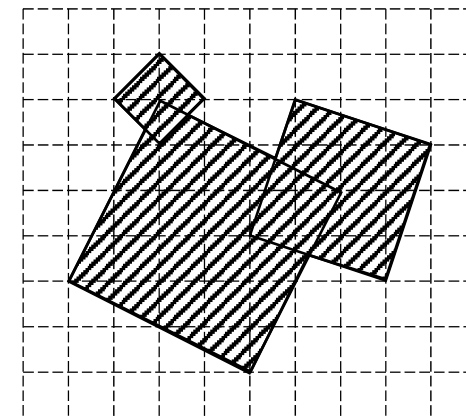
Ответом к заданиям 1—12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

1 За 10 лет население города сократилось на 16%. Одновременно доля пенсионеров увеличилась с 42% до 63% населения города. На сколько процентов увеличилось количество пенсионеров?

2 На рисунке показаны графики рождаемости девочек и мальчиков в городском роддоме первые за 10 месяцев 2017 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число родившихся детей. Для наглядности точки соединены: для мальчиков пунктирной линиями, для девочек — сплошной. Используя эти графики, укажите, сколько месяцев в данном периоде число родившихся мальчиков **превышало** число родившихся девочек?



3 Три квадрата помещены на клетчатую бумагу так, как показано на рисунке. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если размер клетки равен $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4 Две баржи должны подойти к одному и тому же причалу для погрузки. Время прихода каждой из барж равновозможно в течение данных суток. Определите вероятность того, что одной из барж придётся ожидать освобождения причала, если время, необходимое для погрузки первой баржи — 4 часа, а второй — 6 часов. Ответ округлите до сотых.

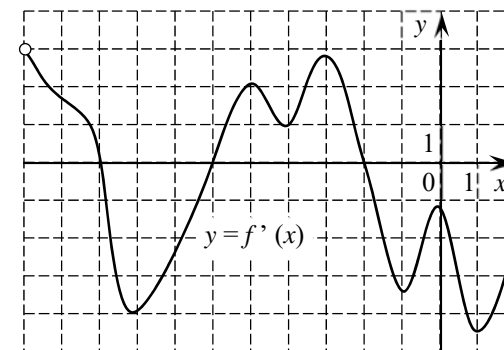
5 Решите уравнение:

$$3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$$

Если корней больше одного, в ответе укажите их сумму.

6 Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается его основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E . Продолжение хорды DF окружности пересекает сторону AB в её середине M . Касательная к окружности, проходящая через точку F , пересекает сторону AB в точке G . Найдите $\cos \angle A$, если $MG : EG = 2 : 3$.

7 На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-11; 2)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



- 8 На боковых рёбрах AA_1 и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен $V = 27$, взяты точки D и E соответственно так, что $AD = DA_1$ и $BE : B_1E = 1 : 2$. Найдите объём части призмы, заключённой между плоскостями ABC и DEC .

Часть 2

- 9 Известно, что $\sin \alpha = -\sqrt{5}/3$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Найдите:

$$\left(\cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{5} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}$$

Ответ округлите до сотых.

- 10 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_0 = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_1 = 68^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды равен $m = 0,4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём:

$$x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}$$

Где $c = 4200$ Дж/(кг \cdot $^\circ\text{C}$) — теплоёмкость воды, $\gamma = 21$ Вт/(м \cdot $^\circ\text{C}$) — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 224 м?

- 11 На перевозку разных строительных материалов грузовик по-разному расходует горючее. В первый день половину рабочего времени он возил щебень, а половину — песок; во второй день $1/7$ времени он возил щебень, $4/7$ — песок и $2/7$ — кирпич; в третий день $1/4$ времени он возил щебень, $3/8$ — песок и столько же — кирпич. На сколько процентов израсходует грузовик дневной норматив горючего, взяв целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, а во второй и в третий — перерасходовал на 10/7% и 5/4% соответственно?

- 12 Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 4]$:

$$f(x) = -|x^3 - 6x^2 + 9x - 3|$$

Для решения задач 13—19 используйте отдельные бланки. Запишите сначала номер задачи, а затем — полное обоснованное решение и ответ.

- 13 а) Решите уравнение:

$$(5 \sin x + 12 \cos x)(100 + 48 \cos x - 13 \cos 2x) = 1757$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[31\pi; 37\pi]$.

- 14 Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC , $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$, $\angle ACB = 90^\circ$. Прямоугольный цилиндр вписан в эту пирамиду так, что его нижнее основание лежит в плоскости ABC , а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью.

- а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на оси вписанного цилиндра.
б) Найдите радиус основания цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна $8\pi/3$.

- 15 Решите неравенство:

$$\log_{2-x}(1-2x) \cdot \log_{1-4x+4x^2}(x^2+6x+9) + \log_{\frac{1-x}{2-2x-4}}(x^2+4x+3) \leq 0.$$

- 16 В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник. На продолжении его стороны AB за точку A взята точка M так, что $AM = \sqrt{11} - 1$. Из точки M к окружности проведена секущая MN с внешней частью $MK = 2$ так, что угол NBK — тупой.

- а) Докажите, что лучи MN и MB лежат по одну сторону от прямой MO .
б) Найдите угол между этими лучами.

- 17 База находится в лесу в 5 км от прямой дороги, а в 13 км от базы на этой дороге расположена железнодорожная станция. Пешеход пойдёт по дороге со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться от базы до станции?

- 18 Найдите все a , при которых уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} \right)^x + \left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6} \right)^x = 2(\sqrt{2})^x$$

имеет единственное решение.

- 19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

- а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литр. Можно ли не более чем за четыре переливания урвать количество воды в бочках?
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно урвать количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо урвать количество воды в 26 бочках?