Ответы к демонстрационному варианту Профильного Единого государственного экзамена 2018 по математике

Вариант М1 (средний уровень)

Задания 1—12

1	2	3
14	20	12

4	5	6
88	3	6272

7	8	9
7	7,5	0,8

10	11	12
20	60	−0,4375

Профильный ЕГЭ-2018 по математике, 11 класс, www.berdov.com
Вариант М1 (средний уровень)

Ответы и указания к заданиям 13—19

В заданиях 13—19 можно применять любые методы и теоремы, если они описаны хотя бы в одном издании из Федерального перечня учебников, рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

13 а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) $x=-\frac{5\pi}{2};\ x=-\frac{\pi}{2};\ x=\frac{3\pi}{2}$.

14 б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

15 $-2<x\le-\frac{3}{2},\ x=-1$.

16 14.

17 3 часа 44 минуты

18 $a=-2,\ x=11,\ y=2$.

19 а) 39; б) да; в) 167.

4. Решение. Рассмотрим самый невыгодный вариант: вынули 29 синих шаров, затем 29 белых, а затем 29 зелёных. Тогда следующий шар обязательно даст нам 30 шаров одного цвета. Поэтому всего надо 29 + 29 + 29 + 1 =88 шаров.

5. Решение. Введём новую переменную: $2^x = t > 0$. Перепишем уравнение:

$$t^2 - (7-x)\cdot t + 12 - 4x = 0$$

То, что переменных стало две, не должно нас пугать. Считаем дискриминант:

$$\begin{aligned} D_t &= (7-x)^2 - 4\cdot(12-4x) = \\ &= 49 - 14x + x^2 - 48 + 16x = \\ &= x^2 + 2x + 1 = \\ &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

Дискриминант — точный квадрат. Поэтому

$$\begin{aligned} t &= \frac{7-x\pm\sqrt{(x+1)^2}}{2} = \\ &= \frac{7-x\pm|x+1|}{2} = \\ &= \frac{7-x\pm(x+1)}{2} \end{aligned}$$

Мы вправе убрать модуль, поскольку перед ним стоит «плюс-минус», который ни с чем не нужно согласовывать (бывает, что нужно, поэтому будьте внимательны — данное правило не универсально). Получаем:

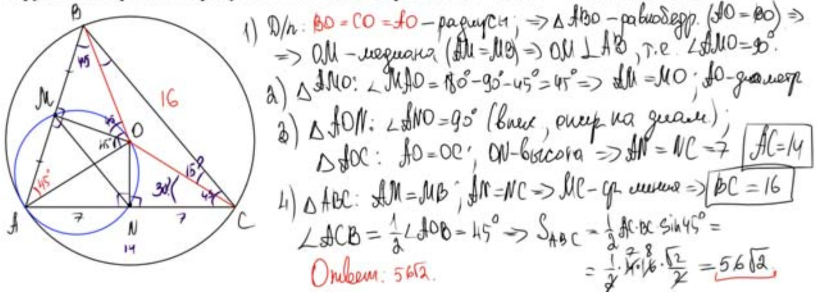
$$2^x = \frac{7-x+(x+1)}{2} = 4;$$

$$2^x = \frac{7-x-(x+1)}{2} = 3-x.$$

Уравнение $2^x = 4$ имеет один корень: $x = 2$. А в уравнении $2^x = 3-x$ правая сторона монотонно растёт, левая — убывает, поэтому корень будет единственным, и его легко обнаружить подбором: $x = 1$.

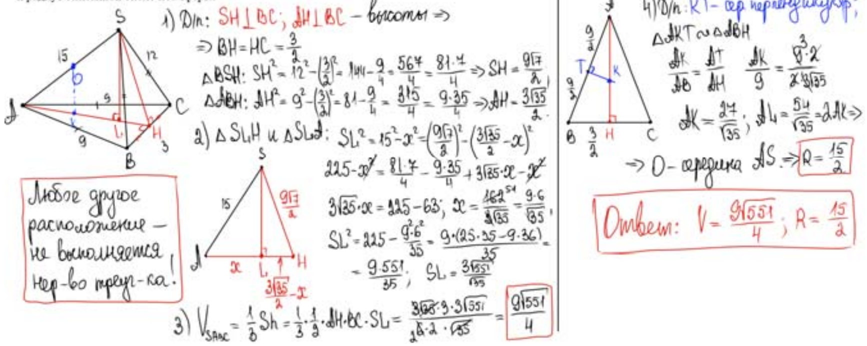
6.

Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, а M — середина стороны AB. Найти площадь треугольника ABC, если описанная около треугольника AMO окружность пересекает прямую AC в точке N, причем $MN = 8$, $AN = 7$ и $\angle MOA = 45°$.



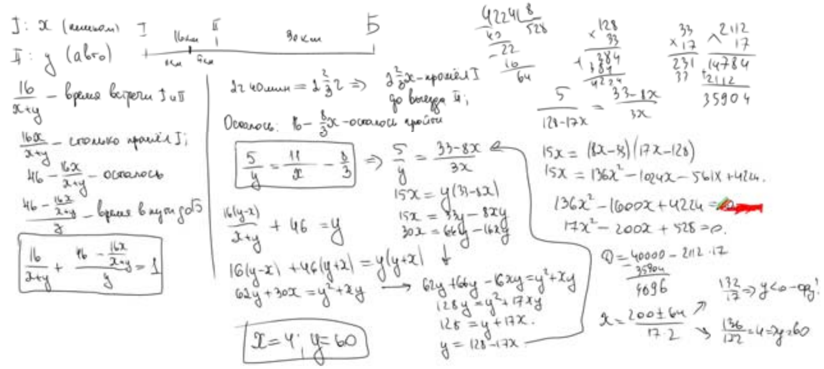
8.

Рёбра треугольной пирамиды равны 15, 12, 12, 9, 9 и 3. Найдите объём пирамиды и радиус описанной около неё сферы.



11.

10.52. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий машину,— в 30 км от базы (между базой и домом первого приятеля). Они двинулись в путь одновременно, причем владелец машины поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца машины, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость машины? (Все скорости считаются постоянными.)



12.

Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=(x-2)(4+(x-1)(x-4))(x-3).$$

$f(x)=((x-2)(x-3))\cdot(4+(x-1)(x-4))=$
$=(x^2-5x+6)(x^2-5x+8)=$
$=((x^2-5x+7)-1)((x^2-5x+7)+1)=$
$=(x^2-5x+7)^2-1;$

$f_{min}:\ x^2-5x+7\to min;$
$x_0=\frac{5}{2}\Rightarrow min$
$\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+7=\frac{25-50+28}{4}=\frac{3}{4}.$
$f_{min}=\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{9}{16}-1=\boxed{-\frac{7}{16}}$

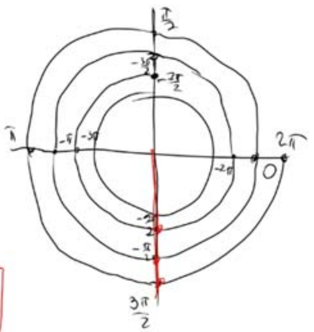
Ответ: $-\frac{7}{16}$.

13.

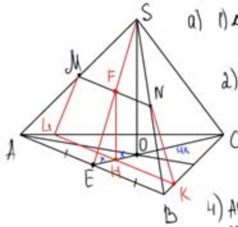
а) Решите уравнение $12\cdot 36^{\sin x}-12^{\sin x}=4^{\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2};2\pi\right]$.

$12\cdot 9^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}-3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}-4^{\sin x}=0$
$\underbrace{4^{\sin x}}_{>0}\left(12\cdot\left(3^{\sin x}\right)^2-3^{\sin x}-1\right)=0$
$12t^2-t-1=0\qquad (3^{\sin x}=t>0)$
$D=1+48=49\Rightarrow t=\frac{1\pm7}{24}\nearrow\frac{1}{3}\ \searrow -\frac{1}{4}<0.$
$3^{\sin x}=3^{-1}\Rightarrow \sin x=-1$ $\boxed{x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ (а)

Ответы $\longrightarrow$ б) $-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}$.



14.



а) 1) $\triangle ABS$: M – серед. AS, N – серед. BC $\Rightarrow$ MN – ср. линия, $MN\parallel AB$ $\Rightarrow$ MF – ср. линия $\triangle ASE$, т.е. $EF=SF$.

2) Д/п: $SE=(SCE)\cap(ABS)$; $FH=(SCE)\cap\alpha$; $LK=(ABC)\cap\alpha$; т.к. $H\in EC\in(ABC)$, то $H\in LK$.

3) $\triangle ABC$: $AC=BC$; $\triangle ABS$: $AS=BS$; $AE=EB$ $\Rightarrow$ CE – высота $(CE\perp AB)$, SE – высота $(SE\perp AB)$, но $CE\cap SE=E$ $\Rightarrow$ $AB\perp(SCE)$, в т.ч. $AB\perp FH$

4) $AB\parallel MN$, $MN\in\alpha$ $\Rightarrow$ $AB\parallel\alpha$ или $AB\in\alpha$, но $E\in AB$, $E\notin\alpha$ $\Rightarrow$ $AB\parallel\alpha$;

5) $AB\in(ABC)$, $LK\in(ABC)$ $\Rightarrow$ $AB\parallel LK$ или $AB\cap LK$, но $LK\in\alpha$, а $AB\parallel\alpha$ $\Rightarrow$ $AB\parallel LK$, но $AB\perp(SCE)$ $\Rightarrow$ $LK\perp FH$, $LK\perp EC$

6) $(ABC)\cap\alpha=LK$; $LK\perp FH\in\alpha$; $LK\perp EC\in(ABC)$ $\Rightarrow$ $\angle FHE=90°$ (лин. угол двугр. угла между α и (ABC)) $\Rightarrow$ $FH\perp AB$, $FH\perp CE$, $AB\cap CE=E$ $\Rightarrow$ $FH\perp(ABC)$, но $SO\perp(ABC)$, т.е. $SO\parallel FH$

7) $\triangle SEO$: $EF=FS$, $FH\parallel SO\Rightarrow FH$ – ср. линия, т.е. $EH=OH=x$; но $OC:OE=2:1\Rightarrow OC=2EO=4x\Rightarrow HC=5x\Rightarrow\boxed{\frac{EH}{CH}=\frac{5}{1}}$

б) 1) $AB\parallel\alpha\Rightarrow$
$\Rightarrow\rho(A;\alpha)=\rho(E;\alpha)=$
$=EH=x$

2) $\triangle EBC$: $\angle CEB=90°$; $\angle EBC=60°$; $BC=30$;
$EC=6x=BC\cdot\sin 60°=$
$=\frac{30\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$;
$x=\frac{15\sqrt{3}}{6}=\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

15.

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)\log_3\left(-2x-x^2\right)\ge\log_3\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)$$

О.Д.З.: $-2x-x^2>0$
$x^2+2x<0$
$x(x+2)<0$
$x\in(-2;0)$

$x\in(-2;0)\Rightarrow x<0$. Значит, $|x|=-x$.

$x+\frac{11}{2}\ge0$
$x\ge-\frac{11}{2}=-5{,}5$

$\underbrace{\sqrt{x+\frac{11}{2}}}_{>\sqrt{-2+\frac{11}{2}}}+\underbrace{\frac{x}{2}+1}_{>-1+1=0,\ \text{т.к. } x>-2}\ge0$

Верно для $\forall x\in(-2;0)$.

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)}{\log_2 3}\geqslant\frac{\log_2\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)}{\log_2 3}\quad\Big|\cdot\log_2 3>0$$

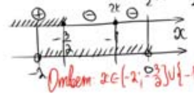
$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)-\log_2\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)\ge0$

$\log_2(-2x-x^2)\cdot\left(\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)-\log_2\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)\right)\ge0$

$\log_2(-2x-x^2)=0$
$-2x-x^2=1$
$x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$x=-1$ (2к)

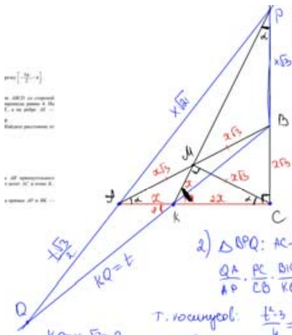
$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)=\log_2\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)$
$\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}$
$\sqrt{x+\frac{11}{2}}=-x+\frac{1}{2}\ge0$, т.к. $x<0$

$x+\frac{11}{2}=x^2-x+\frac{1}{4}$
$x^2-2x-\frac{21}{4}=0$
$D=4+21=25.$
$x=\frac{2\pm5}{2}$: $\frac{7}{2}>0$, $-\frac{3}{2}$



Ответ: $x\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{-1\}$.

16.



б) $x\sqrt{3}=\sqrt{21}$
$x=\sqrt{7}$.

$\angle KPC=30°$
$PK=4x$
$PC=4x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2x\sqrt{3}$

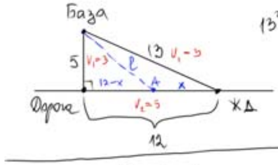
$\triangle APC$: $AP^2=(3x)^2+(2x\sqrt{3})^2=9x^2+12x^2=21x^2$
$AP=x\sqrt{21}$
$\triangle BKC$: $BK^2=(x\sqrt{3})^2+(2x)^2=x^2\cdot3+x^2\cdot4=7x^2$
$BK=x\sqrt{7}$

1) $\triangle KBC$: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}-1$
$\frac{3}{4}=\frac{1}{\cos^2\varphi}-1$
$\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{7}{4}$
$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2) $\triangle BPQ$: AC – секущая;
$\frac{QA}{AP}\cdot\frac{PC}{CB}\cdot\frac{BK}{KQ}=1$
$\frac{QA}{x\sqrt{21}}\cdot\frac{2x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}\cdot\frac{x\sqrt{7}}{KQ}=1$
$QA=\frac{KQ\sqrt{3}}{2}=\frac{t\sqrt{3}}{2}$

т. косинусов: $\frac{t^2\cdot3}{4}=t^2+7-2\cdot t\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}$
$\frac{t^2}{4}-4t+7=0$
$D=16-7=9\Rightarrow t=\frac{4\pm3}{2\cdot\frac{1}{4}}\nearrow 2\ \searrow 14$

$KQ>x=\sqrt{7}>2$
$\boxed{KQ=14}$



$13^2-5^2=169-25=144$

1) Б → ЖД: $t=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$

2) Б → Д → ЖД: $t=\frac{5}{3}+\frac{12}{5}=\frac{25+36}{15}=\frac{61}{15}=4\frac{1}{15}$

3) Б → A → ЖД: $l=\sqrt{25+(12-x)^2}$

$t=\frac{l}{3}+\frac{x}{5}=\frac{\sqrt{25+(12-x)^2}}{3}+\frac{x}{5}\to\min$

$t'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}(12-x)\cdot(-1)}{\cancel{2}\sqrt{25+(12-x)^2}}+\frac{1}{5}=0$

$\frac{12-x}{3\sqrt{25+(12-x)^2}}=\frac{1}{5}$ $\boxed{12-x=y}$

$5y=3\sqrt{25+y^2}$
$25y^2=9\cdot(25+y^2)$
$25y^2=9\cdot 25+9y^2$

$16y^2=9\cdot 25$
$y=\frac{3\cdot 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$

$\boxed{y=3{,}75}$
$\boxed{x=8{,}25}$
$l=6{,}25$

17. $t=\frac{6{,}25}{3}+\frac{8{,}25}{5}=\frac{25^{\backslash 5}}{3\cdot 4}+\frac{33^{\backslash 3}}{5\cdot 4}=\frac{125+99}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{\overset{56}{\cancel{224}}}{3\cdot\cancel{4}\cdot 5}=\frac{56}{15}=3\frac{44}{60}<4$ $\boxed{\text{Ответ 3ч. 44 мин}}$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение:

$$\begin{cases}\frac{9}{\sqrt{x+a}}+\frac{16}{\sqrt{y-a}}\le 22-\sqrt{x+a}-4\sqrt{y-a},\\ 2^{x-11}\cdot\log_2(4-y)=1.\end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases}x>a\\ y>-a\end{cases}$

$\sqrt{x+a}=\left(\sqrt[4]{x+a}\right)^2$

$\frac{9}{\sqrt{x+a}}=\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x+a}}\right)^2$

$4\sqrt{y-a}=\left(2\sqrt[4]{y-a}\right)^2$

$\frac{16}{\sqrt{y-a}}=\left(\frac{4}{\sqrt[4]{y-a}}\right)^2$

$\left(\frac{9}{\sqrt{x+a}}+\sqrt{x+a}\right)+\left(\frac{16}{\sqrt{y-a}}+4\sqrt{y-a}\right)\le 22$

$\left(\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x+a}}\right)^2-2\cdot\frac{3}{\cancel{\sqrt[4]{x+a}}}\cdot\cancel{\sqrt[4]{x+a}}+\left(\sqrt[4]{x+a}\right)^2\right)+$
$+\left(\left(\frac{4}{\sqrt[4]{y-a}}\right)^2-2\cdot\frac{4}{\sqrt[4]{y-a}}\cdot 2\sqrt[4]{y-a}+\left(2\sqrt[4]{y-a}\right)^2\right)\le 22-6-16$

$\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x+a}}-\sqrt[4]{x+a}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt[4]{y-a}}-2\sqrt[4]{y-a}\right)^2\le 0$

т.к. $s^2+t^2\le 0\Rightarrow\begin{cases}s=0\\ t=0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}\frac{3}{\sqrt[4]{x+a}}-\sqrt[4]{x+a}=0\\ \frac{4}{\sqrt[4]{y-a}}-2\sqrt[4]{y-a}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+a}=3\\ \sqrt{y-a}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9-a\\ y=4+a\end{cases}$

$\begin{cases}x=9-a\\ y=4+a\end{cases}\Rightarrow 2^{x-11}\cdot\log_2(4-y)=1$

$2^{9-a-11}\cdot\log_2(4-4-a)=1$

$2^{-a-2}\cdot\log_2(-a)=1$

$\log_2(-a)=2^{a+2}$

$f(a)=\log_2(-a)\ \downarrow\ (a<0)$
$g(a)=2^{a+2}\ \uparrow\ (a\in\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ 1 корень

$a=-2\Rightarrow\log_2 2=2^0\Rightarrow 1=1.$

$\boxed{\text{Ответ: } a=-2\Rightarrow x=11;\ y=2}$

18.

На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

$0{,}405\cdot 17=6{,}885$; $0{,}415\cdot 17=7{,}055$

а) 134

$r=41\Rightarrow r^*\in[0{,}405;0{,}415)$

$n=17\cdot r^*\in[6{,}885;7{,}055)$

$\boxed{n=7}$

$7:18=0{,}3888\ldots$

$38{,}8\to\boxed{39}$

б) $r^*=0{,}005$. $n^*=1\Rightarrow n=\frac{1}{0{,}005}=200.$

Пусть было n голосов.

ф.1: $r=1\Rightarrow r^*\in[0{,}005;0{,}015)$

$n^*=r^*\cdot n=[0{,}005n;0{,}015n)$

$\begin{cases}0{,}005\le\frac{n^*}{n}\\ 0{,}005>\frac{n^*}{n+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}0{,}005n\le n^*<0{,}005(n+1)\\ 0{,}005n<0{,}005(n+1).\end{matrix}$

$n<n+1$

1 133 → 1 → 0
134 → 67.

$\frac{1}{200}=0{,}005.$ (1)

$\frac{1}{201}<0{,}005$

$\frac{67}{200}=0{,}335$ (34)

$\frac{68}{201}=\frac{1}{3}=0{,}333$ (34)

Было: $133\cdot 1+34=167$
Стало: $133\cdot 0+34=34$

$167-34=133>27.$ Да!

19.

Профильный ЕГЭ-2018 по математике, 11 класс, www.berdov.com
Вариант М1 (средний уровень)

© Павел Бердов — репетитор по математике, www.berdov.com, Москва, 2018 г.
Допускается копирование и использование в некоммерческих целях.