



Демонстрационный вариант
 Профильного Единого государственного экзамена 2018
 по математике

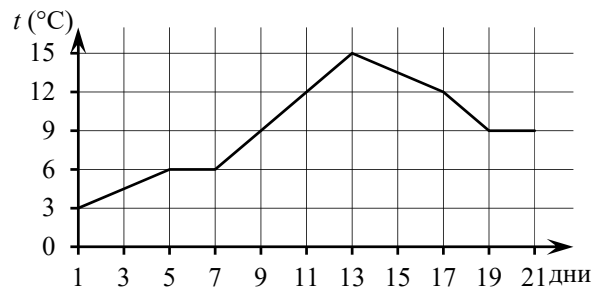
Вариант Н1 (сложный уровень)

Часть 1

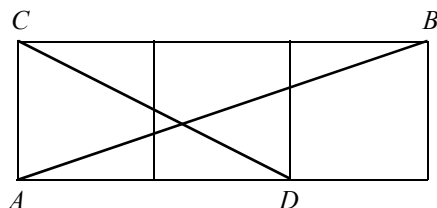
Ответом к заданиям 1—12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

1 Каково минимально возможное число учеников в выпускном классе средней школы, если известно, что процент неуспевающих учеников в классе заключен в пределах от 2,5% до 2,9%?

2 Посев семян тыквы рекомендуется проводить в мае при дневной температуре воздуха не менее +9 °С. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первые три недели мая — с 1 по 21 число. Определите, в течение скольких дней можно производить посев тыквы.



3 Три квадрата расположены так, как показано на рисунке. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .



4 Три самолёта — один ведущий и два ведомых — посылаются на бомбометание по объекту. Радионавигационное оборудование, без которого выход к цели невозможен, имеется только у ведущего самолёта. После выхода на цель самолёты выполняют бомбометание независимо; вероятность разрушить объект для каждого из них равна 0,3. Перед выходом на цель самолёты входят в зону противовоздушной обороны противника, где каждый из них может быть сбит с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что объект будет разрушен. Ответ округлите до сотых.

5 Среди всех несократимых дробей вида m/n , где числитель $m \in \mathbb{Z}$ и знаменатель $n = 27$, найдите наибольшую, удовлетворяющую неравенству:

$$\sqrt{\frac{4x^7 - 10x^3}{4x - x^3 - 3}} \leq x^3$$

В ответе укажите число m .

6 Дана трапеция $ABCD$. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AB пересекает эту сторону в точке M и сторону $CD = 18$ в точке N , причём $CN = 3$. Известно, что площадь четырёхугольника $AMND$ на 400% больше площади четырёхугольника $BMNC$. Найдите MD , если $MC = 4$.

7 Прямая $y = 10x - 30$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + bx + 2$. Найдите b , если известно, что абсцисса точки касания положительна.

8 Объём пирамиды $SABC$ с основанием ABC равен 116. На рёбрах AB , BC и AC взяты точки K , L и M соответственно так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : 2$. Через середину ребра SA параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, пересекающая отрезки SK , SL и SM в точках P , Q и R . Найдите объём призмы, одно из оснований которой совпадает с треугольником PQR , а другое лежит в плоскости ABC .

Часть 2

9 Найдите x , если $|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45$.

10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 160 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 120 до 240 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено следующее соотношение:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в метрах.

- 11 Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B , расстояние между которыми равно 60 км, и одновременно прибыли на станцию C , расположенную на прямой AB . Обратный путь каждый из них проделал ровно на 2 ч быстрее, поскольку один из них увеличил скорость на 25 км/ч, а другой — на 20. Найдите первоначальные скорости поездов. В ответе укажите среднее арифметическое этих скоростей.

- 12 Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$:

$$f(x) = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x$$

В ответе укажите среднее арифметическое этих чисел.

Для решения задач 13—19 используйте отдельные бланки. Запишите сначала номер задачи, а затем — полное обоснованное решение и ответ.

- 13 а) Решите уравнение:
$$\cos x \cdot \left| \sin^2(0,25x) - 0,25 \right| \cdot \log_{0,2}(\log_{0,2} \sin x) = 0$$

б) Укажите все корни этого уравнения на интервале $(-\pi; 6,3 + \sin 1,5)$.

- 14 В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса. Известно, что угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60° .
а) Докажите, что существует единственная плоскость α , пересекающая отрезки AB и BC в некоторых точках M и N , таких, что $MN = 5$, а точка касания шара с этой плоскостью равноудалена от точек M и N .
б) Пусть плоскость α пересекает продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D . Найдите длину отрезка SD .

- 15 Решите неравенство:

$$\log_{(3^x-3)^2} \left(9^{\frac{x+1}{2}} - 7 \cdot 3^{x+1} + 36 \right) - \log_{(3^x-3)^{-2}} (3^{2x-1} - 3^{x+1} + 6) \geq \frac{3}{2}$$

- 16 Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$ с центром в точке O . Средняя линия MN этого треугольника параллельна стороне AC . Известно, что $AB = 4$ и $\angle A = 60^\circ$.

- а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $OBMN$ можно описать окружность.
б) Найдите расстояния от точек M и N до ближайших к ним точек, в которых прямая MN пересекает окружность.

- 17 Фабрика получила заказ на покраску 6000 м ткани в один цвет и 2000 м — в другой. Каждый рабочий фабрики затрачивает на покраску 5 м ткани в первый цвет одинаковое время, такое же, как на покраску 3 м ткани во второй цвет. Как разделить 214 рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, если все рабочие приступят к работе одновременно и каждая бригада будет красить ткань только в один цвет?

- 18 Найдите все целые значения параметра a из отрезка $[19; 29]$, при которых верно неравенство

$$\frac{x^6 + 8x^5 - 2}{x^a} \leq 1$$

где x — корень уравнения $t^{17} + 2t^{11} + 4t^5 = 1$.

- 19 На доске написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых больше 4, но не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стерли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.