



Ответы к демонстрационному варианту  
 Профильного Единого государственного экзамена 2018  
 по математике

Вариант Н1 (сложный уровень)

Задания 1—12

1	2	3
35	13	45
4	5	6
0,74	34	20
7	8	9
-6	14,5	9
10	11	12
2	45	-1

Ответы и указания к заданиям 13—19

В заданиях 13—19 можно применять любые методы и теоремы, если они описаны хотя бы в одном издании из Федерального перечня учебников, рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

13

Ответ:

- а)  $x = \arcsin 0,2 + 2\pi n$ ;  $x = \pi - \arcsin 0,2 + 2\pi k$ ;  $x = 2\pi/3 + 4\pi l$ ;  $n, k, l \in \mathbb{Z}$ .  
 б)  $x = \arcsin 0,2$ ;  $x = \arcsin 0,2 + 2\pi$ ;  $x = \pi - \arcsin 0,2$ ;  $x = 2\pi/3$ .

а) Решите уравнение:

$$\cos x \cdot |\sin^2(0,25x) - 0,25| \cdot \log_{0,2}(\log_{0,2} \sin x) = 0$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу  $(-\pi; 6,3 + \sin 1,5)$ .

Handwritten solution for problem 13:

а)  $|\sin^2 \frac{x}{4} - \frac{1}{4}| = 0$   
 $\sin^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$   
 $\sin \frac{x}{4} = \pm \frac{1}{2}$

Unit circle diagrams for  $\sin \frac{x}{4} = \pm \frac{1}{2}$  and  $\cos x = 0$ .

б)  $\log_{\frac{1}{5}}(\log_{\frac{1}{5}} \sin x) = 0$   
 $\log_{\frac{1}{5}} \sin x = 1$   
 $\sin x = \frac{1}{5}$   
 $x = \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$   
 $x = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$

О.Д.З.:  $\log_{\frac{1}{5}} \sin x > 0$   
 $\sin x > 0$   
 $0 < \sin x < 1$

Unit circle diagram for  $\sin x > 0$ .

Омбсмен: а)  $x = \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$ ;  
 $x = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$ ;  
 $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$ .

Unit circle diagram for  $\sin x > 0$  with shaded regions.

б)  $\arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n < 6,3 + \sin 1,5$   
 $\arcsin \frac{1}{5} < \arcsin \frac{1}{5} = \frac{\pi}{6}$   
 $\pi = 3,1415... < 3,15 \Rightarrow 2\pi < 6,3$   
 $\sin 1,5 > \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\pi}{6}$   
 $6,3 + \sin 1,5 > 2\pi + \frac{\pi}{6}$   
 $\arcsin \frac{1}{5} + 2\pi < \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi < 6,3 + \sin 1,5$   
 Омбсмен: б)  $x = \frac{2\pi}{3}$ ;  
 $x = \arcsin \frac{1}{5}$ ;  $\arcsin \frac{1}{5} + 2\pi$   
 $\pi - \arcsin \frac{1}{5}$ .

14

Ответ: 9.

В призму вписанную пирамиду  $SABC$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABC$  вписан шар единичного радиуса. Известно, что угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что существует единственная плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная отрезкам  $AB$  и  $BC$  в некоторых точках  $M$  и  $N$ , таких, что  $MN = 5$ , а точка касания шара с этой плоскостью равноудалена от точек  $M$  и  $N$ .

б) Пусть плоскость  $\alpha$  пересекет продолжение высоты пирамиды  $SK$  в точке  $K$  и некоторую точку  $D$ . Найдите длину отрезка  $SK$ .



15

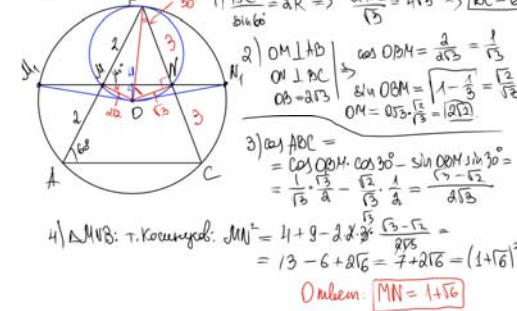
Ответ:  $(-\infty; \log_3 2) \cup \left[ \log_3 \frac{11 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right)$ .

$\log_{(x-3)^2} (9^{x^2-7 \cdot 3^{x+1}+36}) - \log_{(x-3)^2} (3^{2x-1} - 3^{x+1} + 6) \geq \frac{3}{2}$   
 $\log_{(x-3)^2} (3 \cdot 9^x - 3 \cdot 7 \cdot 3^x + 3 \cdot 18) + \log_{(x-3)^2} \left( \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 18 \right) \geq \frac{3}{2}$   
 $\log_{(x-3)^2} (3 \cdot (3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 18)) + \log_{(x-3)^2} \left( \frac{1}{3} \cdot (3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 18) \right) \geq \frac{3}{2}$   
 $3^x = t > 0 \Rightarrow \log_{(t-3)^2} (3 \cdot (t^2 - 7t + 18)) + \log_{(t-3)^2} \left( \frac{1}{3} \cdot (t^2 - 9t + 18) \right) \geq \frac{3}{2}$   
 $\log_{(t-3)^2} (t-3)(t-4) + \log_{(t-3)^2} (t-3)(t-6) \geq \frac{3}{2}$   
 $\log_{(t-3)^2} (t-3)^2 (t-4)(t-6) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{(t-3)^2} (t-4)(t-6) \geq \frac{3}{2}$   
 $1 + \log_{(t-3)^2} (t-4)(t-6) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{(t-3)^2} (t-4)(t-6) \geq \frac{1}{2}$   
 $\log_{(t-3)^2} (t-4)(t-6) \geq \log_{(t-3)^2} \sqrt{(t-3)^2} \Rightarrow (t-4)(t-6) \geq (t-3)$   
 $t^2 - 10t + 24 \geq t - 3 \Rightarrow t^2 - 11t + 27 \geq 0$   
 $t^2 - 11t + 27 = (t-4)(t-7) \geq 0$   
 $t \in (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$   
 Ответ:  $x \in (-\infty; \log_3 4] \cup \left[ \log_3 \frac{11 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right)$

16

Ответ:  $\sqrt{10} - \sqrt{6}$  и  $\sqrt{10} - 1$ .

Треугольник  $ABC$  вписан в окружность радиуса  $2\sqrt{5}$ . Прямые  $AB = 4$  и  $\angle A = 60^\circ$ . Найдите среднюю линию  $MN$  этого треугольника, параллельную  $AC$ , и расстояния от точек  $M$  и  $N$  до ближайших к ним точек, в которых прямая  $MN$  пересекет окружность.



Теперь найдем  $SE$  и  $u$   
 5)  $DH \perp MN$ ,  $OM_1 = ON_1 = 2\sqrt{5}$   
 Т.к.  $\angle BMO = \angle BNO = 90^\circ$ ,  $u$  и  $u_1$  -  $BMO$  -  $BNO$ .  
 тогда  $\angle OMN = \angle ONM = 30^\circ$ .  
 6)  $\triangle OMN$ :  $OM = 2\sqrt{5}$ ,  $\angle OMN = 30^\circ \Rightarrow ON = \sqrt{5}$ .  
 $MN = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$   
 $\Rightarrow \triangle OMN$  - равнобедрен.  
 $M_1H^2 = N_1H^2 = OM_1^2 - OH^2 = 4 - 2 = 2$   
 $M_1H = N_1H = \sqrt{2} \Rightarrow MN_1 = 2\sqrt{2}$   
 8)  $MM_1 = M_1H - MH = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ ;  
 $NN_1 = N_1H - NH = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$   
 Ответ:  $MM_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ ,  $NN_1 = 0$

17

Ответ: 137 и 77 человек.

Фабрика получила заказ на покраску 6000 м ткани в один цвет и 2000 м — в другой. Каждый рабочий фабрики затрачивает на покраску 5 м ткани в первый цвет одинаковое время, такое же, как на покраску 3 м ткани во второй цвет. Как разделить 214 рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, если все рабочие приступают к работе одновременно и каждая бригада будет красить ткань только в один цвет?

Скорость покраски: первый цвет:  $v_1 \frac{m}{ч}$   $\Rightarrow \frac{5}{v_1} = \frac{3}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{3}{5}v_1$   
 $x \in [0, 214]$   
 Пусть  $x$  человек — первый цвет,  $t_1 = \frac{6000}{xv_1}$   
 $214 - x$  — второй,  $t_2 = \frac{2000}{(214-x)v_2} = \frac{1000 \cdot 5}{(214-x)xv_1}$   
 Нужно:  $\max \left( \frac{6000}{xv_1}, \frac{10000}{3(214-x)v_1} \right) \rightarrow \min$   
 1)  $\frac{6000}{xv_1} \geq \frac{10000}{3(214-x)v_1} \Rightarrow \frac{6000}{x} \geq \frac{10000}{3(214-x)}$   
 $\frac{18}{x} + \frac{10}{x-214} \geq 0 \Rightarrow \frac{18x - 18 \cdot 214 + 10000}{x(214-x)} \geq 0$   
 $18x - 3852 + 10000 \geq 0 \Rightarrow 18x \geq 2852 \Rightarrow x \geq 158.44$   
 $x \in [158.44, 214]$   
 $t_1 = \frac{6000}{158.44v_1} = 43.103$   
 $t_2 = \frac{10000}{3(214-158.44)v_1} = 49.137$   
 Ответ: 137 и 77

18

Ответ:  $a \in \{19; 20; 21; 22; 23\}$ .

Найдите все целые значения параметра  $a$  из отрезка  $[19; 29]$ , при которых верно неравенство

$$\frac{x^6 + 8x^5 - 2}{x^2} \leq 1$$

где  $x$  — корень уравнения  $t^3 + 2t^2 + 4t = 1$ .

Пусть  $f(t) = t^3 + 2t^2 + 4t - 1$ ,  
 Тогда  $f'(t) = 3t^2 + 4t + 4 > 0$   
 $f(t) > 0$  на  $(0; 1)$ ,  $f(1) = 6 > 0$   
 Значит,  $f(t) > 0$  на  $(0; 1)$ .  
 Но  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 6 > 0$ , поэтому  
 $f(t) = 0$  имеет единственный корень  $x \in (0; 1)$ ,  $a \in [19; 29] \Rightarrow x^a \in (0; 1)$

$x^6 + 8x^5 - 2 \leq x^2 \Rightarrow x^6 + 8x^5 - 2 \leq x^2$   
 $x^6 - x^2 - 8x^5 + 2 \leq 0$   
 $g(x) = x^6 - x^2 - 8x^5 + 2$   
 $g'(x) = (6x^5 - 2x - 40x^4) = 2x(3x^4 - 1 - 20x^3)$   
 Значит,  $g(x) \uparrow$  (для  $x \in (0; 1)$ ).  
 Кроме того,  $x^{29} < x^{22} < x^2 < x^{19}$ , так как  $x \in (0; 1)$   
 $x^a \cdot x^6 - 8x^5 + 2 > 0$  Пусть  $a = 23 \Rightarrow$   
 $g(x) = x^{23} - x^6 - 8x^5 + 2 = x^6(x^{17} - 1) - (x^6 - 2) =$   
 $= x^6(x^{17} - 2x^{14} + 4x^{11} - 1) = 0$   
**Ответ:  $a \in \{19, 20, 21, 22, 23\}$**

19 Ответ: а) да; б) нет; в) 20,5

Решение

а) Пусть первоначально на доске было 24 числа, равных 5, и 6 чисел, равных 35. Их среднее арифметическое равно 11. Среднее арифметическое получившихся чисел равно  $\frac{6 \cdot 17,5}{6} = 17,5 > 16$ .

б) Пусть с доски было стерто  $k$  чисел, сумма оставшихся была равна  $S$ , а стала равна  $\frac{S}{2}$ . По условию оказались стерты только числа, получившиеся из 5, поэтому  $\frac{S+5k}{30} = 11$ , то есть  $S = 330 - 5k$ . Среднее арифметическое оставшихся чисел равно  $\frac{S}{2(30-k)}$ , откуда получаем:

$$14 < \frac{330-5k}{2(30-k)} < 15; \quad 840 - 28k < 330 - 5k < 900 - 30k; \quad 22 < \frac{510}{23} < k < \frac{114}{5} < 23.$$

Таких целых чисел  $k$  нет.

в) Пусть с доски было стерто  $k$  чисел, сумма оставшихся была равна  $S$ , а стала равна  $\frac{S}{2}$ . По условию оказались стерты только числа, получившиеся из 5, поэтому  $\frac{S+5k}{30} = 11$ , то есть  $S = 330 - 5k$ . Необходимо найти наибольшее возможное значение числа

$$A = \frac{S}{2(30-k)}. \text{ Имеем: } A = \frac{330-5k}{2(30-k)} = \frac{5}{2} + \frac{90}{30-k}.$$

Число  $A$  будет наибольшим, если  $k$  будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 44 и на доске осталось  $30 - k$  чисел, поэтому для суммы  $S$  выполняется неравенство  $330 - 5k = S \leq 44(30 - k)$ , откуда

$$330 - 5k \leq 44(30 - k); \quad 39k \leq 990; \quad k \leq \frac{330}{13} < 26; \quad k \leq 25. \text{ Значит, } A \leq \frac{5}{2} + \frac{90}{30-25} = 20,5.$$

Приведем пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 20,5. Пусть первоначально на доске было написано 25 чисел, равных 5, и 5 чисел, равных 41. Тогда их среднее арифметическое было равно  $\frac{125+205}{30} = 11$ . Все пятёрки стерли с доски, а остальные числа уменьшились в 2 раза. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно  $\frac{5 \cdot 41}{2 \cdot 5} = 20,5$ .

1. Решение. Пусть  $n$  — количество учащихся,  $k$  — количество неуспевающих. Тогда  $2,5 \leq \frac{k}{n} \cdot 100 \leq 2,9$ , откуда  $\frac{1000}{29}k \leq n \leq 40k$  (1). При  $k = 1$  имеем  $34 \frac{14}{29} \leq n \leq 40$ , т. е.

минимально возможное число учащихся равно 35. При  $k \geq 2$  все значения  $n$ , удовлетворяющие неравенству (1), не соответствуют смыслу задачи ( $n$  — количество учащихся в классе).

Д/н:  $AE \parallel CD$ ,  $BE = CE \Rightarrow \Delta ABE$  — равнобедр.;  
 $\angle BAE = \angle CBE = \alpha$  ( $\alpha$  — искомым)  
 Д/н:  $O$  — середина  $AB$ , но тогда  $AO = BO = EO \Rightarrow$   
 $\Rightarrow O$  — центр опис. окруж.  $\Delta ABE$ ,  $AB$  — диаметр.  
 Но тогда  $\angle ABE = 90^\circ$  (выс. окр. на диаметре)  $\Rightarrow \alpha = 45^\circ$   
**Ответ: 45**

3.

Вероятность **НЕ** разгнаться:  $\bar{p} = 1 - 0,3 = 0,7$   
 3 самолета:  $\bar{p}_3 = 0,7^3$   
 2 самолета:  $\bar{p}_2 = 0,7^2$   
 Итого:  $\bar{p} = 0,8^3 \cdot 0,7^3 + 0,8^2 \cdot 0,2 \cdot 0,7^2 + 0,8 \cdot 0,2^2 \cdot 0,7 =$   
 $= 0,8 \cdot 0,7 \cdot (0,8^2 \cdot 0,7^2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,2^2) =$   
 $= 0,56 \cdot (0,336 + 0,112 + 0,04) =$   
 $= 0,56 \cdot 0,468 = 0,260736.$   
 Вероятность разгнаться:  
 $p = 1 - \bar{p} = 1 - 0,260736 = 0,739264 \approx 0,74$   
**Ответ: 0,74**

4.

$$\sqrt{\frac{4x^3 - 10x^2}{4x^3 - x^2 - 3}} \leq x^3 \Rightarrow \frac{4x^3 - 10x^2}{4x^3 - x^2 - 3} \leq x^3$$

О.Д.З.:  $\frac{4x^3 - 10x^2}{4x^3 - x^2 - 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2(2x - 5)}{x^3 - 4x^2 + 3} \leq 0$

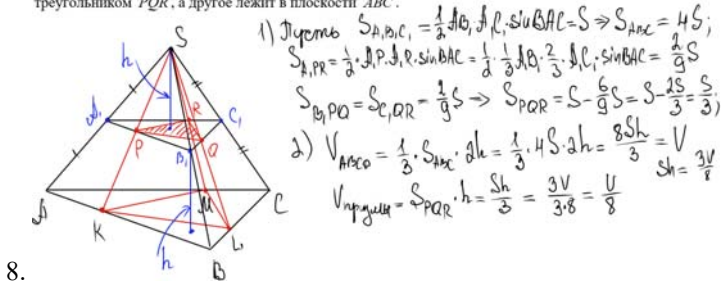
$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

**Ответ:**  $x \in \left\{ \frac{5}{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3} \right\}$

5.  $\frac{m}{n} = \frac{m}{27} \sqrt{\frac{m}{n}}$  ... **Ответ:**  $m = 36$

6.  $16 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi$   
 $MD^2 = x^2 + 25a^2 + 10ax \cos \varphi$   
 $MD = 5 \cdot 4 = 20$

На сторонах AB, BC и AC основания ABC пирамиды SABC объемом V взяты точки K, L и M соответственно так, что AK:KB = BL:LC = CM:MA = 1:2. Через середину ребра SA параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, пересекающая отрезки SK, SL и SM в точках P, Q и R. Найдите объем пирамиды, одно из оснований которой совпадает с треугольником PQR, а другое лежит в плоскости ABC.



8.

$$1 + \cos(\pi\sqrt{x}) + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45$$

$1 + \cos(\pi\sqrt{x}) + |x^2 - 15x + 44| = (-1 - \cos(\pi\sqrt{x})) + (-x^2 + 15x - 44)$   
 $1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \geq -1 - \cos(\pi\sqrt{x})$  (равенство только при  $1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \leq 0$ )  
 $|x^2 - 15x + 44| \geq -(x^2 - 15x + 44)$  (равенство только при  $x^2 - 15x + 44 \leq 0$ )

**Ответ:**  $x = 9$

9.

Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расстояние между которыми равно 60 км, и одновременно прибыли на станцию C, расположенную на прямой AB. Обратный путь каждый из них проделал ровно на 2 ч быстрее, поскольку один из них увеличил скорость на 25 км/ч, а другой — на 20. Найдите первоначальные скорости поездов.

$A \xrightarrow{60} B \xrightarrow{S} C$  Пусть  $v_1 = x, v_2 = y$

$\frac{60+S}{x} = \frac{S}{y} \Rightarrow \frac{x(S+60)}{S} = 2$   $\frac{60+S}{x+25} = \frac{S}{y+20} = 2$

$S = 140, x = 40, y = 30$

**Ответ:**  $30 \text{ и } 40$

11.

11.  $(60+S) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+25}\right) = 2$   
 $S \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+20}\right) = 2$   
 $20(S+60) = 2S$   
 $80(S+20) = 2S$

**Ответ:**  $\frac{4}{5}$